Haben Computer-Algebra-Systeme immer recht?

Helmut Hlavacs, Christoph Überhuber
(Robert Fröschl, Gerald Karner)

Institut für Numerische Mathematik
TU WIEN

Differenziertere Fragestellung:

- Grenzen
- Fehlerhafte/Unvollständige Ergebnisse
- Vor- und Nachteile gegenüber numerischen Methoden

Beispiel: Symbolische Integration

in Mathematica 3.0 und Maple V 4.0

$$\int f(x)\, dx$$

Grenzen der Symbolischen Integration

Stammfunktion existiert nicht

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{\exp x}{x}\,dx$$

Numerische Rechnungen nötig

$$\int \frac{1}{x^5 + x^4 + x - 13}\,dx$$

ergibt in Mathematica 3.0

$$\mathrm{RootSum}\left[-13 + \#1 + \#1^4 + \#1^5, \frac{\log[x - \#1]}{1 + 4\#1^3 + 5\#1^4}\right]$$

Ungewöhnliche Darstellungen

$$\int \sin(ax)^n dx$$

ergibt in Mathematica 3.0

$$-\frac{1}{a}\left(\texttt{Hypergeometric2F1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos(ax)^2\right)\cdots\right)^{(-1-n)/2}$$

$\boxed{\textbf{Hypergeometrische Reihen}}$

$$_pF_q(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{n} (a_j + i - 1) \;\; z^n}{\prod_{j=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} (b_j + i - 1)}$$

$$\cos(z) \;=\; {}_0F_1\left(, \frac{1}{2}, -\frac{z^2}{4}\right)$$

$$\log(z+1) \;=\; z \cdot {}_2F_1\,(1, 1, 2, -z)$$

$$\pi \;=\; 4 - \frac{8}{9} \cdot {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$$

Fehlerhafte oder unvollständige Ergebnisse

Implementierungsfehler

$$\int x\sqrt{x^n - a^n}\,dx$$

ergibt in Maple V 4.0

```
Error (in int)
```

Parameterintegrale schlecht lösbar

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx$$

ergibt in Mathematica 3.0

$$\frac{\operatorname{arctanh}(x/a)}{a}$$

(nicht definiert für $a = 0$)

Auslöschung in der Stammfunktion

$$F(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2ax + 2}\, dx$$

ergibt in Mathematica 2.0

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2-2}}\left[\log\frac{1+a-\sqrt{a^2-2}}{a-\sqrt{a^2-2}} - \log\frac{1+a+\sqrt{a^2-2}}{a+\sqrt{a^2-2}}\right]$$

Imaginäre Zwischenresultate

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)^3}\; dx$$

ergibt in Maple V 4.0

$$\frac{\cdots + 3Ia^4 \log(Ix + \sqrt{-(-a+x)(a+x)})\sqrt{\cdots}}{8(-a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Vor- und Nachteile gegenüber numerischen Methoden

Aufwand

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^8 + x^3 + x - 13}\, dx$$

benötigt in Maple V 4.0

	Rechenzeit	Speicherplatz
Symbolisch	215 s	6 MB
Numerisch	0.1 s	vernachlässigbar

Genauigkeit

Falls Stammfunktion ermittelbar:
kein Verfahrensfehler

Globales Verfahren

Aufwand unabhängig vom Integrationsintervall.
Vorteil bei mehrmaliger Auswertung über verschiedene Intervalle.